

(1) bzw. (5) anhaften, wurde die Gleichung für a_{BS} auf eine andere Gesamtheit von Graphen transformiert. Von dieser zweiten Form aus ließ sich ein Vergleich zwischen a_{BS} und a_{TDL} durchführen, der in der Angabe einer expliziten Transformationsvorschrift (26) zwischen beiden endete.

Die Durchführung dieser Transformation war möglich nach Streichung aller Vakuumgraphen in f_{TDL} , weil dann die Gesamtheiten H und $F + G$ gleich wurden. Oder in anderen Worten: Durch (25) und (26) und die zugehörigen Ableitungen läßt sich eine Streichung der Vakuumgraphen in der TDL-Gleichung rechtfertigen.

Das Renormalisierungsverfahren der Lévy-Graphen, über das in einer kurzen Mitteilung⁶ bereits berichtet wurde und das ausführlich unter diesem Thema in Teil III⁷ behandelt werden soll, läßt sich mit der gleichen Argumentation wie vorher bei den Vakuumgraphen nun auch auf die TDL-Gleichung übertragen⁹, falls f_T renormalisierbar ist.

Zusatz: Inzwischen haben Lehmann und Zimmermann¹⁰ zeigen können, daß die Divergenzen der

TDL-Gleichung sich prinzipiell durch Renormalisierung nur teilweise ausschalten lassen, da die Wellenfunktion a_{TDL} ihrer Definition nach weitere Divergenzen enthält, die mit der Auszeichnung des Zeitpunktes $T = 0$ zusammenhängen. Daraus ist zu schließen, daß der Prozeß der Renormalisierung auf den Transformationsoperator f_T nicht anwendbar ist. Weiter wurde inzwischen von Dyson¹¹ ein Vorschlag gemacht, durch eine andere Definition von a_{TDL} das Auftreten der Vakuumgraphen zu vermeiden. Die von ihm vorgeschlagene Wellenfunktion ist aber identisch mit der hier verwandten a_{BS} , also der einzeitigen BS-Wellenfunktion. Es ist daher auch nicht verwunderlich, daß diese Gleichung sich renormalisieren läßt, wie Dyson in seiner zweiten Note für die vierte Näherung zeigt.

Eine Auswertung des von Dyson angegebenen Gleichungssystems führt auf die hier abgeleitete Gl. (14). Vergleicht man die verschiedenen Dysonschen Definitionen von a_{TDL} und a_{BS} miteinander, so erhält man ebenfalls einen Zusammenhang zwischen beiden vom Typ (26), wie vom Verfasser an anderer Stelle gezeigt werden konnte¹². Der dort mit g bezeichnete Transformationsoperator geht in f_T über, wenn man in ihm die Vakuumgraphen vernachlässigt. Durch eine konsequente Auswertung der dort gewählten Ansätze lassen sich also die gleichen Resultate ebenfalls erzielen.

⁹ Von M. Cini, Nuovo Cimento **10**, 526, 614 [1953], wurde kürzlich die TDL-Gleichung bis zur 4. Ordnung der Kopplungskonstanten in eine relativistisch invariante Form gebracht, die ebenfalls eine Diskussion der Vakuumeffekte und der Renormalisierung ermöglicht.

¹⁰ Private Mitteilung.

¹¹ F. J. Dyson, Physic. Rev. **90**, 994 und **91**, 421 [1953].

¹² W. Macke, Physic. Rev. [1953], im Erscheinen.

Nichtlokale Feldtheorie auf der Grundlage der Salpeter-Bethe-Gleichung I. „Freie“ Teilchen

VON HERMANN L. JORDAN und WILHELM E. FRAHN*

Aus dem Institut für theoretische Physik und dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforsch. **8a**, 620—628 [1953]; eingegangen am 3. August 1953)

Im Rahmen des durch die Salpeter-Bethe-Gleichung beschriebenen relativistischen Zweiteilchenproblems wird der Begriff des freien Teilchens als geeigneter Grenzfall aufgefaßt und am Beispiel des einfachsten irreduziblen Graphen 4. Ordnung (Kreuzgraphen) diskutiert. Daraus ergeben sich Rückschlüsse auf das allgemeine Einteilchenproblem mit vollständiger Wechselwirkung. Für das so definierte „freie“ Teilchen erhält man eine verallgemeinerte Dirac-Gleichung mit Strukturfunktion, die eine Formulierung des Massenproblems der Elementarteilchen ermöglicht. Die erhaltene Gleichung stimmt ihrer Form nach mit den aus den nichtlokalen Feldtheorien folgenden Einteilchengleichungen überein.

Der Begriff des freien Teilchens ist in die Quantentheorie als korrespondenzmäßiges Analogon zum kräftefreien Massenpunkt der klassischen Me-

chanik übernommen worden. Er ist einer Theorie fremd, deren wesentliche Merkmale sich in Unschärferelation und daraus folgender nicht vernach-

* Vorgetragen von W. E. Frahn auf der Tagung des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften in Innsbruck 1953.



lässigbarer Wechselwirkung zwischen Beobachtungsobjekt und Beobachtungsinstrument ausdrücken. Im strengen Sinne gehört das freie Teilchen zu den „unbeobachtbaren“ Größen der Quantentheorie, es läßt sich jedoch als Grenzfall vernachlässigbarer Wechselwirkung betrachten. Freie Teilchen werden in der Quantentheorie durch homogene, lineare Wellengleichungen beschrieben, wie z. B. durch die Dirac-Gleichung

$$(i\gamma_\mu \partial / \partial x_\mu - m) \psi(x) = 0 \quad (1)$$

für freie Spinorteilchen oder die Schrödinger-Gordon-Gleichung

$$(\square - m^2) \varphi(x) = 0 \quad (2)$$

für skalare, bzw. vektorielle Mesonen.

In den letzten Jahren haben sich durch die Entwicklung der relativistischen Quantenfeldtheorien eine Anzahl von Unstimmigkeiten in der Begriffsbestimmung des freien Teilchens ergeben. So deutet das Renormalisierungsproblem¹ eine Schwierigkeit in der Definierbarkeit von Masse, Ladung und anderen Kopplungsparametern an, während Güttinger² zeigen konnte, daß in einer im Sinne der Distributionstheorie von Schwartz³ mathematisch definierten Quantenfeldtheorie Masse und Ladung der freien Teilchen unbestimmte Größen sind. Von Salecker⁴ wurde vorgeschlagen, Ladung und Masse der freien Teilchen Null zu setzen, ein Vorschlag, der sich als Folgerung aus der Renormalisierung ableiten läßt.

Angesichts dieser Schwierigkeiten ist zunächst eine Begriffsbestimmung nötig, die widerspruchsfrei ist. Wir bezeichnen im folgenden ein Teilchen als „frei“, falls seine Wellengleichung keine Stelle im Ortsraum und in der Zeit auszeichnet, d. h. translationsinvariant ist. Aus der Invarianz gegen Raum- und Zeittranslation folgt in bekannter Weise die Definierbarkeit und zeitliche Konstanz von Energie und Impuls, also alle wesentlichen Merkmale des klassisch-mechanischen Begriffs „kräftefreier Massenpunkt“. Falls wir singuläre Operatoren im Sinne der Distributionstheorie zulassen, läßt sich die Bewegungsgleichung eines Teilchens stets als Integralgleichung schreiben

$$\int K(x, x') \psi(x') dx' = 0, \quad (3)$$

wobei $K(x, x')$ ein Kern aus einem geeignet zu wählenden Distributionsraum ist. Wenden wir un-

sere Begriffsbestimmung des „freien“ Teilchens auf Gl. (3) an, d. h. fordern wir Translationsinvarianz in Raum-Zeit, so folgt³ notwendig und hinreichend, daß $K(x, x')$ ein Operator vom „Faltungstyp“, d. h. Gl. (3) von der Form

$$\int K(x - x') \psi(x') dx' = 0 \quad (3a)$$

ist. Gl. (3a) wollen wir für die vorliegende Arbeit als Definition des „freien“ Teilchens ansehen.

Die Bewegung eines Teilchens in Wechselwirkung mit einer Meßapparatur oder einem vorgegebenen äußeren Feld wird beschrieben, indem man zur Wellengleichung des freien Teilchens ein inhomogenes Glied hinzufügt. Dieses enthält das Potential des äußeren Feldes am Orte des betrachteten Teilchens, etwa im Falle der Dirac-Gleichung

$$(i\gamma_\mu \partial / \partial x_\mu - m) \psi(x) = e\gamma_\mu A_\mu(x) \psi(x). \quad (4)$$

Die Form der Potentiale wird entweder aus der Korrespondenz zur klassischen Theorie erschlossen oder quantenfeldtheoretischen Überlegungen entnommen, z. B. Yukawa-Potential = Greensche Funktion der Wellengleichung (2). Gl. (4) enthält die Ruhemasse m des Teilchens, für die man die beobachtete Masse einsetzt.

In der Quantenfeldtheorie wird jedoch durch die Wechselwirkung eines Teilchens mit anderen Teilchen oder mit seinem eigenen Vakuumfeld seine Ruhemasse verändert, eine Tatsache, der man durch Renormalisierung Rechnung zu tragen pflegt. Vom Standpunkt der Distributionstheorie aus erscheint die Renormalisierung als Bestimmung willkürlicher Parameter, die durch die fehlende Dilationsinvarianz der Wechselwirkungsfunktionen im Sinne des Pseudofunktionsbegriffs einerseits, durch die Unbestimmtheit der Division (Nullteiler) bei der Bildung der Wechselwirkungsfunktionen andererseits hereinkommen².

Das Massenproblem der Elementarteilchen kann somit von dieser Seite her nicht sinnvoll formuliert werden, es muß sich vielmehr aus einer Theorie der Wechselwirkung zwischen Beobachtungsinstrument und beobachtetem Teilchen durch einen Grenzübergang zu schwacher Wechselwirkung ergeben. Im folgenden wird gezeigt, daß sich das im obigen Sinne definierte „freie“ Teilchen als Grenzfall des relativistischen Zweikörperproblems aus der Sal-

¹ F. J. Dyson, *Physic. Rev.* **75**, 486, 1736 [1949].

² W. Güttinger, *Physic. Rev.* **89**, 1004 [1953].

³ L. Schwartz, *Théorie des distributions* I, II. Verlag Hermann & Cie. Paris 1950/51.

⁴ H. Salecker, *Z. Naturforschg.* **7a**, 381 [1952].

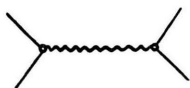
peter-Bethe-Gleichung⁵ gewinnen und sich das Massenproblem formulieren läßt, wobei Modifikationen hinzutreten, die aus anderweitigen Überlegungen in den nichtlokalen Feldtheorien gefordert werden.

1. Das Einteilchenproblem als Grenzfall des Zweiteilchenproblems

Wir beschränken uns im folgenden auf die Quantenelektrodynamik. Eine relativistische Wellengleichung für den Zweiteilchenfall ist von Salpeter und Bethe⁵ und unabhängig von Hayashi und Munakata⁶ aus dem Feynmanschen⁷ Formalismus abgeleitet worden, während Gell-Mann und Low⁸ die nämliche Gleichung aus der allgemeinen Feldtheorie gewonnen haben

$$\psi(1, 2) = \Phi_0(1, 2) + \iiint K_+(1, 1'') K_+(2, 2'') G(1'', 2''; 1', 2') \cdot \psi(1', 2') dx_1' dx_2' dx_1'' dx_2''. \quad (5)$$

Darin sind K_+ die Transportfunktionen der Teilchen 1 und 2, G die Wechselwirkungsfunktion. G kann als Entwicklung nach Potenzen des Koppelungsparameters angegeben werden, deren n -tes Glied die Summe der Beiträge aller möglichen Graphen $2n$ -ter Ordnung zwischen den Punkten $(1'', 2''; 1', 2')$ enthält. In dem Beitrag eines gegebenen Graphen sind die Beiträge aller Graphen mit enthalten, die aus diesem durch Iteration entstehen. Man hat daher nur die irreduziblen Graphen zu berücksichtigen. So enthält z. B. der Wechselwirkungsanteil des einfachsten Graphen



$$G_1(1'', 2''; 1', 2') = (-ie_1 e_2) \gamma_{1\mu} \gamma_{2\mu} \delta_+(1'', 2'') \delta(1'', 1') \delta(2'', 2') \quad (6)$$

zugleich die Gesamtheit der hieraus durch Iteration entstehenden „Leitergraphen“. Man bezeichnet die durch Einsetzen von G_1 in (5) entstehende Näherung als „Leiter-Approximation“. Oben genannte Autoren haben gezeigt, daß aus der Leiter-Approximation von Gl. (5) im Grenzfall $m_2 \gg m_1$ für das Teilchen 1 die Dirac-, bzw. Schrödinger-Gordon-Gleichung mit Coulomb- bzw. Yukawa-Potential ent-

steht. In dieser Näherung läßt sich die Wellenfunktion $\psi(1, 2)$ in ein Produkt von zwei Einteilchenwellenfunktionen aufspalten. Wie bei Hayashi und Munakata⁶ näher ausgeführt, läßt sich (5) für Spinorteilchen dann reduzieren auf

$$D_1 \varphi_1(1) = e_1 e_2 \gamma_{1\mu} \int \varphi_2^+(2') \gamma_{2\mu} \varphi_2(2') \cdot \delta_+(1, 2') dx_2' \varphi_1(1), \quad (7)$$

$$\text{wobei} \quad \psi(1, 2) = \varphi_1(1) \cdot \varphi_2(2).$$

$$\text{Mit} \quad j_\mu(2) = e_2 \varphi_2^+(2) \gamma_{2\mu} \varphi_2(2) \quad (8)$$

$$\text{und} \quad A_\mu(1) = \int j_\mu(2') \delta_+(1, 2') dx_2' \quad (9)$$

$$\text{wird} \quad D_1 \varphi_1(1) = e_1 \gamma_{1\mu} A_\mu(1) \varphi_1(1). \quad (10)$$

Dabei bedeuten $D_1 = i\gamma_{1\mu} \frac{\partial}{\partial x_{1\mu}} - m_1$ den Operator der Dirac-Gleichung für die Koordinaten des ersten Teilchens, $j_\mu(2)$ den Strom des zweiten Teilchens und $A_\mu(1)$ das von $j_\mu(2)$ am Ort des ersten Teilchens erzeugte elektromagnetische Viererpotential. Im nichtrelativistischen Grenzfall wird

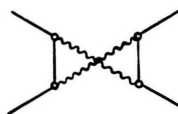
$$j_i(2) = 0, (i = 1, 2, 3); j_0(2) = e_2 \delta(\vec{r}_2) \quad (11)$$

$$A_i(1) = 0; A_0(1) = \frac{e_2}{r_1}. \quad (12)$$

Man erhält die Dirac-Gleichung mit Coulomb-Potential

$$(i\gamma_{1\mu} \partial/\partial x_{1\mu} - m_1) \varphi_1(1) = \frac{e_1 e_2}{r_1} \gamma_{10} \varphi_1(1). \quad (4a)$$

Gl. (10) beschreibt die Bewegung eines Teilchens relativ zu einem schweren „Beobachterteilchen“. Es ist daher zu erwarten, daß die vollständige, aber nicht in geschlossener Form bekannte Wechselwirkungsfunktion, in Gl. (5) eingesetzt, mit der Näherung $m_2 \gg m_1$ die vollständige Dirac-Gleichung eines Teilchens im Felde eines schweren Teilchens



liefert. Der einfachste Graph nächsthöherer, d. h. vierter Ordnung („Kreuzgraph“) läßt jedoch vermuten, daß die vollständige Dirac-Gleichung nicht die Form von Gl. (4) mit einem Potential $A_\mu(x)$ hat, da dieser Graph einen Zusatzterm nicht-lokalen Struktur ergibt, wie die nachfolgende Rechnung zeigt.

Dieser Graph beschreibt die Wechselwirkung beider Teilchen durch Austausch zweier gleichzeitig

⁵ E. E. Salpeter u. H. Bethe, Physic. Rev. **84**, 1233 [1951].

⁶ C. Hayashi u. Y. Munakata, Progr. Theor. Physics **7**, 481 [1952].

⁷ R. P. Feynman, Physic. Rev. **76**, 749, 769 [1949].

⁸ M. Gell-Mann u. F. Low, Physic. Rev. **84**, 350 [1951].

im Felde befindlicher Lichtquanten. Der zugehörige Beitrag zur Wechselwirkungsfunktion hat die Form

$$G_2(1'', 2''; 1', 2') = (-ie_1 e_2)^2 \delta_+(1'', 2') \delta_+(2'', 1') \cdot \gamma_{1\mu} K_+(1'', 1') \gamma_{1\nu} \gamma_{2\nu} K_+(2'', 2') \gamma_{2\mu}. \quad (13)$$

Mit (13) sind alle Graphen berücksichtigt, die aus dem Kreuzgraphen durch Iteration entstehen. Die Untersuchung der Graphen höherer Ordnung zeigt, daß diese Zusatzterme ähnlicher Struktur ergeben. Die im folgenden versuchte Diskussion des Kreuzgraphen dürfte daher wesentliche Rückschlüsse auf

die Art der vollständigen Wechselwirkung erlauben, wenn auch nicht übersehen werden soll, daß nur die vollständige Wechselwirkung physikalische Bedeutung hat, wie auch die Konvergenz⁵ der Reihenentwicklung fraglich ist. Zunächst sei die allgemeine Form der aus Gl. (5) durch die Näherung $m_2 \gg m_1$ entstehenden Dirac-Gleichung angegeben. In Gl. (5) bedeutet $\Phi_0(1, 2)$ die Wellenfunktion der einlaufenden Teilchen 1 und 2. Im gebundenen Zustand verschwindet Φ_0 identisch. Wenden wir auf Gl. (5) den Operator D_1 an, so wird wegen $D_1 \Phi_0 = 0$, $D_1 K_+(1, 1'') = i \delta(1, 1'')$

$$\begin{aligned} D_1 \psi(1, 2) &= i \iiint \delta(1, 1'') K_+(2, 2'') G(1'', 2''; 1', 2') \psi(1', 2') dx_1' dx_2' dx_1'' dx_2'' \\ &= i \iiint K_+(2, 2'') G(1, 2''; 1', 2') \psi(1', 2') dx_1' dx_2' dx_2''. \end{aligned} \quad (14)$$

Im Grenzfall $m_2 \gg m_1$ kann die Zweiteilchenwellenfunktion in ein Produkt von zwei Einteilchenwellenfunktionen aufgespalten werden

$$\psi(1, 2) = \varphi_1(1) \varphi_2(2), \quad (15)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} D_1 \varphi_1(1) \varphi_2(2) &= i \iiint K_+(2, 2'') G(1, 2''; 1', 2') \\ &\cdot \varphi_1(1') \varphi_2(2') dx_1' dx_2' dx_2''. \end{aligned} \quad (16)$$

Nun gilt nach Feynman⁷

$$\begin{aligned} \varphi(2) &= \int K_+(2, 2') \gamma_{20} \varphi(2') d^3 x_2' \\ \varphi^+(2) &= \int \varphi^+(2') \gamma_{20} K_+(2', 2) d^3 x_2'. \end{aligned} \quad (17)$$

Multipliziert man (16) von links mit $\varphi_2^+(2) \gamma_{20}$ und integriert über die Fläche $t_2 = +\infty$, so wird mit der Normierung

$$\int \varphi^+(2) \gamma_{20} \varphi(2) d^3 x_2 = 1 : \quad (18)$$

$$\begin{aligned} D_1 \varphi_1(1) &= i \iiint \varphi_2^+(2'') G(1, 2''; 1', 2') \varphi_2(2') \\ &\cdot \varphi_1(1') dx_1' dx_2' dx_2'' \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{oder} \quad D_1 \varphi_1(1) = \int K(1, 1') \varphi_1(1') dx_1' \quad (20)$$

mit

$$\begin{aligned} K_2(1, 1') &= -ie_1^2 e_2^2 \iint \varphi_2^+(2'') \delta_+(1, 2') \delta_+(2'', 1') \gamma_{1\mu} K_+(1, 1') \gamma_{1\nu} \gamma_{2\nu} K_+(2'', 2') \gamma_{2\mu} \varphi_2(2') dx_2' dx_2'' \\ &= -ie_1^2 e_2^2 \gamma_{1\mu} K_+(1, 1') \gamma_{1\nu} \underline{K}_2(1, 1') \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{mit} \quad \underline{K}_2(1, 1') = \iint \varphi_2^+(2'') \delta_+(1, 2') \delta_+(2'', 1') \gamma_{2\nu} K_+(2'', 2') \gamma_{2\mu} \varphi_2(2') dx_2' dx_2''. \quad (23)$$

Nunmehr wollen wir über die Wellenfunktion des schweren Teilchens zunächst so verfügen, daß die Wellengleichung des ersten Teilchens die eines „freien“ Teilchens, d. h. eine Wellengleichung vom Faltungs-

$$\begin{aligned} K(1, 1') &= i \iint \varphi_2^+(2'') G(1, 2''; 1', 2') \varphi_2(2') \\ &\cdot dx_2' dx_2''. \end{aligned} \quad (21)$$

Gl. (20) haben wir als die vollständige Dirac-Gleichung des Einteilchenproblems anzusehen.

2. Die nichtlokale Natur der Wechselwirkung

Der Integralkern $K(1, 1')$ beschreibt den Einfluß der vollständigen Wechselwirkung in der Einteilchengleichung (20). Falls er nicht ausschließlich aus Beiträgen bestehen sollte, deren Wirkung auf den Lichtkegel beschränkt ist und die sich daher im nichtrelativistischen Grenzfall auf $K(1) \delta(1, 1')$ reduzieren, so haben wir es mit einer nichtlokalen Wechselwirkung zu tun, da in den Wechselwirkungsbeitrag zur Stelle 1 nicht nur der Wert der Wellenfunktion an dieser Stelle, sondern die Werteverteilung in einer Umgebung eingeht. Das durch $\varphi_1(1)$ beschriebene Teilchen erhält daher eine raumzeitliche Ausdehnung.

Wir wollen nun den Beitrag des Kreuzgraphen im einzelnen betrachten. Setzen wir G_2 aus Gl. (13) in (21) ein, so ergibt sich

typ wird. Dies wird erreicht, wenn die Wellenfunktion des zweiten Teilchens keine Stelle in der Raum-Zeit auszeichnet, d. h. durch ebene Wellen beschrieben wird. In diesem Falle sind die schweren Teilchen

überall mit gleicher Wahrscheinlichkeit anzutreffen, stellen daher ein „Untergrundfeld“ dar, in dem das erste Teilchen sich „frei“ bewegt. Dieses Modell entspricht in gewissem Sinne einem realen „freien“ Teilchen, denn die Bewegung eines Elektrons etwa erfolgt stets in einer Umgebung schwerer Teilchen (Nukleonen und Mesonen), die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeitsdichte am Ort des Teilchens vorhanden sind. Das Teilchen bewegt sich daher wie in einem homogenen Medium, erfährt aber nirgends eine Ablenkung aus seiner Bewegungsrichtung. Fügen wir zu diesem „Untergrundfeld“ z. B. noch ein einzelnes, an einer bestimmten Stelle lokalisiertes

Teilchen hinzu, so erhalten wir die Bewegung des vorher „freien“ Teilchens im Felde dieses zweiten. Dieser letztere Fall wird an anderer Stelle betrachtet werden. In der vorliegenden Arbeit sei daher nur die Beeinflussung des „freien“ Teilchens durch das Untergrundfeld der Masse m_2 untersucht. Hierzu machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned}\varphi_2(2') &= e^{iPx_2'} \chi(P), \\ \varphi_2^+(2'') &= e^{-iPx_2''} \chi^+(P).\end{aligned}\quad (24)$$

(Auf die durch diesen Ansatz hereinkommenden Invarianzschwierigkeiten wird in Abschnitt 4 eingegangen.)

Wir erhalten

$$\underline{K}_2(1, 1') = \chi^+(P) \gamma_{2\nu} \underline{K}_2(1, 1') \gamma_{2\mu} \chi(P) \quad (25)$$

mit

$$\underline{K}_2(1, 1') = \iint e^{iP(x_2' - x_2'')} \delta_+(1, 2') \delta_+(2'', 1') K_+(2'', 2') dx_2' dx_2'' \quad (26)$$

Durch Einsetzen der Fourier-Transformierten der Feynmanschen δ_+ und K_+

$$\delta_+(x) = \int \frac{e^{ikx}}{k^2} d^4k, \quad K_+(x) = -i \int \frac{e^{ikx} (\gamma_\mu k_\mu - m)}{k^2 - m^2} d^4k \quad (27)$$

erhält man die Darstellung von $\underline{K}_2(1, 1')$ durch ein Fourier-Integral

$$\underline{K}_2(1, 1') = -i \int \frac{e^{ik(x_1 - x_1')} [\gamma_{20} (P - k)_0 - m_2]}{k^4 [(P - k)^2 - m_2^2]} d^4k \quad (28)$$

Gl. (28) zeigt, daß der Zusatzterm \underline{K}_2 vom Faltungstyp ist, daher eine Veränderung der Bewegungsgleichung des „freien“ Teilchens ergibt. Wir können Gl. (20) schreiben

$$D_1 \varphi(1) = \int \underline{K}_2(1 - 1') \varphi(1') dx_1' = \underline{K}_2 * \varphi(1) \quad (29)$$

und erhalten für die Fourier-Transformierten (Faltung geht über in Produkt)

$$(\gamma_\mu k_\mu + m_1 + \tilde{K}_2(k)) \tilde{\varphi}(k) = 0. \quad (30)$$

Der durch die Wechselwirkung hereingekommene Zusatzterm liefert ein additives Glied in der Wellengleichung. Hieraus ergibt sich ein Hinweis auf die allgemeine Formulierung des Massenproblems (vgl. Abschn. 5). Die Behandlung des Leitergraphen ergibt in derselben Approximation einen divergenten Renormalisierungsterm oder, vom Standpunkt der Distributionstheorie aus, einen unbestimmten Ausdruck durch das Auftreten von $\delta(k)/k^2$. Man erhält wie oben

$$\begin{aligned}D_1 \varphi(1) &= e_1 \gamma_{1\mu} e_2 \chi^+(P) \gamma_{2\mu} \chi(P) \\ &\quad \cdot \int \frac{\delta(k)}{k^2} d^4k \varphi(1).\end{aligned}\quad (31)$$

Die Unbestimmtheit des Divisionsproblems im Sinne der Distributionstheorie^{2,3} erfordert das Ersetzen

von $\delta(k)/k^2$ durch $\delta(k)/k^2 + C\delta(k^2)$, wobei C eine willkürliche Konstante ist, die insbesondere so gewählt werden kann, daß das Integral verschwindet.

3. Die Struktur der Wechselwirkung im Ortsraum, „Ausdehnung“ der Teilchen

Eine sinnvolle nichtlokale Theorie muß die Eigenschaft haben, daß nur solche Raum-Zeit Punkte wesentliche Beiträge zur Wechselwirkung ergeben, die in einer Umgebung des Aufpunktes der Ausdehnung einer Elementarlänge, etwa der Compton-Wellenlänge eines der beteiligten Teilchen liegen. Hierzu untersuchen wir die Eigenschaften der Wechselwirkungsfunktion Gl. (28) im Ortsraum. Aus der Fourier-Darstellung von $\underline{K}_2(1, 1')$ ist ersichtlich, daß die Ortsfunktion überall endlich und stetig ist, also weder auf dem Lichtkegel singulär, noch auf den Lichtkegel als Träger beschränkt ist. Bei der anschließenden komplexen Integration geht in den einzelnen Termen diese Eigenschaft verloren, ein geschlossener Ausdruck läßt sich jedoch nicht angeben.

Wir schreiben $\underline{K}_2(1, 1')$ in der Form

$$\underline{K}_2(1, 1') = -i (\gamma_{20} (P_0 - i\partial/\partial x_{10}) + m_2) F(1, 1') \quad (32)$$

mit
$$F(x) = \int \frac{e^{ikx} d^4k}{k^4 ((P-k)^2 - m_2^2)} \quad (33)$$

und transformieren auf das Ruhesystem des zweiten Teilchens

$$P = (P_0 = m_2, 0, 0, 0). \quad (34)$$

Die k_0 -Integration wird in der komplexen k_0 -Ebene nach Feynman auf folgendem Wege ausgeführt

An den vier Polen hat der Integrand die Residuen ($\kappa = |k|$)

$$R_{1,3} = \frac{2m_2 \mp \kappa}{8\kappa^4 m_2^2},$$

$$R_{2,4} = \pm \frac{2m_2^2 + \kappa^2 \mp 2m_2 \sqrt{m_2^2 + \kappa^2}}{8\kappa^4 m_2^2 \sqrt{m_2^2 + \kappa^2}}. \quad (35)$$

Damit bleibt nach Ausführung der Winkelintegrationen

$$x_0 > 0: F(x) = \frac{\pi^2 i}{m_2^2 r} \left[\int_0^\infty d\kappa \sin \kappa r e^{i\kappa x_0} \left(\frac{2m_2}{\kappa^3} - \frac{1}{\kappa^2} \right) + e^{im_2 x_0} \int_0^\infty d\kappa \sin \kappa r e^{i\sqrt{m_2^2 + \kappa^2} x_0} \left(\frac{2m_2^2}{\kappa^3 \sqrt{m_2^2 + \kappa^2}} + \frac{1}{\kappa \sqrt{m_2^2 + \kappa^2}} - \frac{2m_2}{\kappa^3} \right) \right],$$

$$x_0 < 0: F(x) = \frac{\pi^2 i}{m_2^2 r} \left[\int_0^\infty d\kappa \sin \kappa r e^{-i\kappa x_0} \left(\frac{2m_2}{\kappa^3} + \frac{1}{\kappa^2} \right) - e^{-im_2 x_0} \int_0^\infty d\kappa \sin \kappa r e^{-i\sqrt{m_2^2 + \kappa^2} x_0} \left(\frac{2m_2^2}{\kappa^3 \sqrt{m_2^2 + \kappa^2}} + \frac{1}{\kappa \sqrt{m_2^2 + \kappa^2}} + \frac{2m_2}{\kappa^3} \right) \right] \quad (36)$$

oder

$$x_0 > 0: F(x) = \frac{\pi^2}{m_2 r} \left[\left((x_0 + r)^2 + \frac{i(x_0 + r)}{m_2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \varepsilon(x_0 + r) + i \ln |x_0 + r| \right) - \left((x_0 - r)^2 + \frac{i(x_0 - r)}{m_2} \right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} \varepsilon(x_0 - r) + i \ln |x_0 - r| \right) \right]$$

$$+ \frac{\pi^4}{2r} e^{im_2 x_0} \left[r^2 \varepsilon(r) * \left(H_0^1(m_2 \sqrt{x_0^2 - r^2}) + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - r^2}} H_1^1(m_2 \sqrt{x_0^2 - r^2}) \right) - \frac{1}{m_2^2} \varepsilon(r) * H_0^1(m_2 \sqrt{x_0^2 - r^2}) \right],$$

$$x_0 < 0: F(x) = \frac{\pi^2}{m_2 r} \left[\left((x_0 + r)^2 - \frac{i(x_0 + r)}{m_2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \varepsilon(x_0 + r) - i \ln |x_0 + r| \right) + \left((x_0 - r)^2 - \frac{i(x_0 - r)}{m_2} \right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} \varepsilon(x_0 - r) - \ln |x_0 - r| \right) \right] \quad (37)$$

$$- \frac{\pi^4}{2r} e^{-im_2 x_0} \left[r^2 \varepsilon(r) * \left(H_0^1(m_2 \sqrt{x_0^2 - r^2}) - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - r^2}} H_1^1(m_2 \sqrt{x_0^2 - r^2}) \right) - \frac{1}{m_2^2} \varepsilon(r) * H_0^1(m_2 \sqrt{x_0^2 - r^2}) \right].$$

Die Integrationen über die von den Polen der k_0 -Integration herrührenden Beiträge sind im Sinne des Pseudofunktionsbegriffs (P. F.) nach Schwartz³ ausgeführt und die Fourier-Integrale über die Produkte von $\frac{1}{\kappa^n}$ mit $\frac{e^{i\sqrt{m_2^2 + \kappa^2} x_0}}{\sqrt{m_2^2 + \kappa^2}}$ als Faltung über die Fourier-Transformierten der Faktoren geschrieben. Es ist

$$\text{P. F. } \mathfrak{F} \left\{ \frac{1}{\kappa^n} \right\} = \frac{(-1)^n \pi}{i^n (n-1)!} \kappa^{n-1} \varepsilon(\kappa), \quad (38)$$

$\mathfrak{F} \{ \} = \text{Fourier-Transformierte}$

$$\mathfrak{F} \left\{ \frac{e^{i\sqrt{m_2^2 + \kappa^2} x_0}}{\sqrt{m_2^2 + \kappa^2}} \right\} = i \pi H_0^1(m_2 \sqrt{x_0^2 - r^2}), \quad (39)$$

wobei $\varepsilon(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ und H_0^1 die Hankel-Funktion erster Art vom Index 0 bedeuten. Das Konvergenzverhalten wird durch die für die k_0 -Integration erforderliche Partialbruchzerlegung zerstört. Diese Eigenschaft ist jedoch am ursprünglichen Ausdruck (33) abzulesen. Hier interessiert vor allem das Verhalten des Beitrags, der von den Polen 2 und 4 herrührt, da in diesem die Masse des Untergrundteilchenfeldes die raumzeitliche Struktur bestimmt.

Setzen wir nun noch den relativistischen Abstand $\xi = \sqrt{x_0^2 - r^2}$, so erkennt man, daß die Struktur im Ortsraum bis auf von den Pseudofunktionen herührende Renormalisierungskonstanten durch den Verlauf der Hankel-Funktionen vom Argument ξ/λ bestimmt wird, wobei $\lambda = 1/m_2$ die Compton-Wellenlänge des Untergrundteilchens ist.

Während $H_0^1(\xi/\lambda)$ im zeitartigen Bereich des Lichtkegels oszillatorischen Charakter hat, fällt

$$iH_0^1(i\xi/\lambda) = \frac{2}{\pi} K_0(\xi/\lambda)$$

im raumartigen Bereich wie $e^{-\xi/\lambda}/(\xi/\lambda)^{1/2}$ asymptotisch ab. Der wesentliche Anteil der Wechselwirkung ist dadurch auf einen Bereich des mittleren Ausdehnungsradius λ beschränkt.

Die Struktur der von den Polen 1 und 3 herührenden Terme wird nicht von der Comptonwellenlänge des Bezugsteilchens 2 bestimmt. Die Wechselwirkungsfunktion $K_2(1, 1')$ enthält jedoch nach Gl. (22) noch den Faktor $K_+(1, 1')$, der diese Terme mit der Compton-Wellenlänge des ersten Teilchens abschneidet.

Die raumzeitliche Erstreckung der nichtlokalen Wechselwirkung auf einen Bereich der Größenordnung der Compton-Wellenlänge des Teilchens 1 bzw. des Bezugsteilchens kann als „Ausdehnung“ des „freien“ Teilchens gedeutet werden. Die Schwierigkeiten, die der invarianten Einführung einer Ausdehnung in einer relativistischen Feldtheorie entgegenstehen, sind oft diskutiert worden^{9,10}. Sie lassen sich umgehen, wenn man die Teilchen als punktförmig ansieht, die Wechselwirkung mit anderen Teilchen jedoch über einen Raum-Zeit-Bereich erstreckt^{11,12}. Die „Ausdehnung“ wird durch den Wirkungszusammenhang mit dem Untergrundfeld beschrieben und ist nicht einfach als räumliche Ausdehnung aufzufassen. Da die Wechselwirkung sich in dem vorliegenden Fall auch auf den raumartigen Bereich erstreckt, so kann der nichtrelativistische Grenzfall durch eine räumliche Ausdehnung beschrieben werden. Alle aus einem einzelnen Beitrag zur Wechselwirkung (hier dem Kreuzgraphen) gezogenen Schlüsse sind jedoch mit

Vorsicht zu betrachten, da bei der Summation über alle derartigen Terme sich stets Glieder kompensieren werden, wie dies vor allem aus dem Feynman-Dyson-Schwingerschen^{1,7,13} Streuformalismus bekannt ist. Hinzu kommt, daß die effektive Ausdehnung der Wechselwirkung von der Wellenfunktion abhängt, auf die sie angewandt wird. Betrachten wir z. B. die Anwendung eines Faltungsoperators auf eine Wellenfunktion: Da letztere i. a. nur in einem bestimmten Teil des k -Raumes wesentlich von Null verschieden ist (also ein Wellenpaket mit engem Impuls- bzw. Frequenzbereich ist), bei der Fouriertransformation aber Faltung in Produkt übergeht, so unterscheiden sich in ihrer Wirkung zwei Faltungsoperatoren nicht, die außerhalb des k -Trägers der Wellenfunktion verschieden sind. Im Ortsraum können sich solche Faltungsoperatoren jedoch in ihrem analytischen Verhalten weitgehend unterscheiden.

Damit zeigt sich, daß die vorliegende Theorie wie jede nichtlokale Theorie „Elementarlängen“ enthält. Bemerkenswert ist jedoch, daß diese nichtlokale Struktur aus dem Formalismus der bisherigen Feldtheorie zu folgen scheint, im Gegensatz zu der Auffassung, daß die Einführung einer elementaren Länge ein neues Prinzip in der Physik darstelle^{14,15,16,17,18}. Als Elementarlänge erhielten wir neben der Compton-Wellenlänge des ersten Teilchens die Compton-Wellenlänge des betrachteten „Untergrundfeldes“. Da sich in der Umgebung eines Teilchens stets Teilchen (Nukleonen und Mesonen) verschiedener Massen befinden, so haben wir verschiedene Elementarlängen zu berücksichtigen, die die Erstreckung der verschiedenen Anteile der Wechselwirkung kennzeichnen. Im Grenzfall $m_2 \rightarrow \infty$ geht die nichtlokale Wechselwirkung in eine lokale über, schweren Teilchen gegenüber erscheint daher ein herausgegriffenes leichtes Teilchen als Punktteilchen.

Im Innern des nichtlokalen Wechselwirkungsbereichs können die aus nichtlokalen Theorien bekannten Abweichungen vom Kausalverhalten¹⁹ auftreten. Eine abschließende Diskussion dieser Frage ist jedoch erst möglich, wenn für eine vollständige

⁹ A. March, Z. Physik **114**, 215, 653 [1939], **115**, 245, 522 [1940].

¹⁰ H. S. Snyder, Physic. Rev. **71**, 1 [1947].

¹¹ A. Pais u. G. E. Uhlenbeck, Physic. Rev. **79**, 145 [1949].

¹² H. L. Jordan, Z. Naturforschg. **8a**, 341 [1953].

¹³ J. Schwinger, Physic. Rev. **74**, 1439 [1948]; **75**, 651 [1949]; **76**, 791 [1949].

¹⁴ M. Born, Rev. mod. Physics **21**, 463 [1949].

¹⁵ H. Mc Manus, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **195**, 323 [1948].

¹⁶ H. Yukawa, Physic. Rev. **77**, 218 [1950].

¹⁷ C. Bloch, Dan. Rat. Fys. Medd. **27**, Nr. 8 [1952].

¹⁸ P. Kristensen u. C. Möller, Dan. Rat. Fys. Medd. **27**, Nr. 7 [1952].

¹⁹ W. Heisenberg, Z. Naturforschg. **5a**, 251 [1950]; **6a**, 281 [1951].

Wechselwirkungsfunktion die zugehörigen Wellenfunktionen errechnet sind, da, wie oben auseinander-gesetzt, erst die Struktur der Wellenfunktion das Kausalverhalten kennzeichnet. Wir wollen hierauf nicht weiter eingehen.

4. Nichtlokale Struktur der vollständigen Wechselwirkung

Im folgenden soll versucht werden, allgemeine Aussagen aus der Salpeter-Bethe-Gleichung zu erhalten, ohne von der Entwicklung der Wechselwirkungsfunktion nach dem Kopplungsparameter Gebrauch zu machen. Da einerseits nur die vollständige Wechselwirkung physikalische Bedeutung hat, andererseits in den Mesonentheorien eine Entwicklung nach dem Kopplungsparameter schwerlich konvergieren dürfte, lassen sich aus der Diskussion spezieller Graphen kaum endgültige Schlüsse ziehen. Die Diskussion des Kreuzgraphen (vgl. Abschn. 2 und 3) sollte lediglich an einem Beispiel die allgemeinen Züge der Theorie verständlich machen und Hinweise auf die mögliche Struktur der vollständigen Wechselwirkung ergeben.

Wir betrachten nun die vollständige Salpeter-Bethe-Gl. (5). Die Fourier-Transformierte von G sei G

$$G(1, 2''; 1', 2') = \iiint e^{-i(k_1 x_1 + k_2'' x_2'' - k_1' x_1' - k_2' x_2')} \cdot g(k_1, k_2''; k_1', k_2') dk_1 dk_2'' dk_1' dk_2'. \quad (40)$$

Der Ansatz (24) für die Wellenfunktion des zweiten Teilchens ergibt eine Wellengleichung, die nicht invariant gegenüber alleiniger Lorentz-Transformation der k_μ ist, (24) ist jedoch der einzige Ansatz, der unbeschränkte Translationsinvarianz zur Folge hat.

Es sei deshalb hier ein allgemeinerer Fall betrachtet, bei dem φ_2 ein Untergrundfeld von Teilchen verschiedener Massen und Impulsrichtungen in einem endlichen Raum-Zeit-Gebiet beschreibt, wie es bei der Bewegung eines Teilchens in einer Beobachtungsapparatur vorliegt. Wir können dann auch nur näherungsweise Translationsinvarianz im Innern des Gebiets für kleine Translationen verlangen. Die erforderliche Lorentz-Invarianz wird erhalten, wenn wir φ_2 und das Raum-Zeit-Gebiet lorentz-invariant definieren.

Zu diesem Zwecke setzen wir an

$$\begin{aligned} \varphi_2(2') &= \int \chi(\gamma_{2\sigma} P_\sigma') e^{i P' x_2'} dP', \\ \varphi_2^+(2'') &= \int \chi^+(\gamma_{2\tau} P_\tau'') e^{-i P'' x_2''} dP'', \end{aligned} \quad (41)$$

$\chi(P)$ ist teilweise durch die Forderung bestimmt, daß es im Innern des Raum-Zeit-Gebietes konstante Wahrscheinlichkeitsdichte ergeben soll.

Für $K(1, 1')$ ergibt sich dann

$$K(1, 1') = i \iint dP' dP'' \iint dk_1 dk_1' e^{-i(k_1 x_1 - k_1' x_1')} \cdot \chi^+(\gamma_{2\tau} P_\tau'') g(k_1, -P''; k_1', -P') \chi(\gamma_{2\sigma} P_\sigma'). \quad (42)$$

Wegen der vorausgesetzten näherungsweisen Translationsinvarianz können wir für Punktepaare x, x' im Innern des Gebietes $k = k'$ setzen und erhalten

$$K(1, 1') = i \iint dP' dP'' \chi^+(\gamma_{2\tau} P_\tau'') \cdot \int dk e^{i k_1(x_1' - x_1)} g(k_1, -P''; k_1, -P') \chi(\gamma_{2\sigma} P_\sigma') \quad (43)$$

oder

$$K(1, 1') = \int e^{i k_1(x_1' - x_1)} \bar{g}(k_1) dk_1 = K(1 - 1'), \quad (44)$$

wobei

$$\bar{g}(k_1) = i \iint dP' dP'' \chi^+(\gamma_{2\tau} P_\tau'') \cdot g(k_1, -P''; k_1, -P') \chi(\gamma_{2\sigma} P_\sigma') \quad (45)$$

den Erwartungswert von g bezüglich des Untergrundfeldes darstellt. In dem vorliegenden Fall wird daher auch die allgemeine Wechselwirkung im Innern des Bereichs durch einen Operator vom Faltungstyp beschrieben. Die Konsequenzen des Faltungscharakters sind bereits im 2. Abschnitt angedeutet worden, wir wollen sie hier weiter ausführen. Mit $K(1, 1') = K(1 - 1')$ wird aus Gl. (20)

$$D_1 \varphi(1) = K * \varphi(1) \quad (46)$$

als verallgemeinerte Dirac-Gleichung des Einteilchenproblems ohne äußeres Feld, mit $K(1 - 1')$ aus (44).

Mit Hilfe des Faltungssatzes folgt für die Fourier-Transformierte

$$[\gamma_\mu k_\mu + m_1 + \bar{g}(k)] \tilde{\varphi}(k) = 0. \quad (47)$$

Man erhält einen additiven Zusatzterm \bar{g} , der als Erwartungswert der Fourier-Transformierten der Wechselwirkungsfunktion auftritt. Aus Gründen der lorentz-invarianten Wahl von φ_2 ist \bar{g} , wie aus (45) ersichtlich, eine lorentzinvariante Funktion von k , daher eine Funktion von $\gamma_\mu k_\mu$. Fassen wir zusammen

$$m_1 + \gamma_\mu k_\mu + \bar{g}(\gamma_\mu k_\mu) = L(\gamma_\mu k_\mu), \quad (48)$$

so erhalten wir die Gleichung

$$L(\gamma_\mu k_\mu) \tilde{\varphi}(k) = 0. \quad (49)$$

5. Das Massenproblem

Die Form der Gl. (49) gibt einen Hinweis darauf, wie im Rahmen der hier beschriebenen Feldtheorie das Massenproblem der Elementarteilchen formuliert werden kann. Die Untersuchungen von Güttinger² machen es wahrscheinlich, daß die Massen der Elementarteilchen in der bisherigen Quantenfeldtheorie nicht bestimmt sind. Die Feststellung des vorhergehenden Abschnitts, daß die Wechselwirkung eines Teilchens mit einem Untergrundfeld seine Masse verändert, legt die folgende Annahme nahe.

Die gesamte Ruhemasse eines Teilchens entsteht aus der Wechselwirkung mit anderen Teilchen; wechselwirkungsfreien Teilchen kann daher die Ruhemasse Null zugeschrieben werden. Mit $m_1 = 0$ erhalten wir als Wellengleichung des „freien“ Teilchens

$$L_0(\gamma_\mu k_\mu) \tilde{\varphi}(k) = 0 \quad (50)$$

mit $L_0(\gamma_\mu k_\mu) = \gamma_\mu k_\mu + \bar{g}_0(\gamma_\mu k_\mu)$. (51)

Seien nun κ_i die Nullstellen von L_0 , so entsprechen diesen Massenwerte, welche die möglichen Wechselwirkungsmassen „freier“ Teilchen darstellen, falls die κ_i reelle Werte haben. Es ist dann

$$L_0(\gamma_\mu k_\mu) = M(\gamma_\mu k_\mu) \prod_i (\gamma_\mu k_\mu + \kappa_i),$$

wobei $M(\gamma_\mu k_\mu)$ eine nullstellenfreie, etwa meromorphe Funktion bedeutet und die verallgemeinerte Dirac-Gleichung (50) wird zu einer „Multimassen-Gleichung“ mit Strukturfunktion

$$M(\gamma_\mu k_\mu) \prod_i (\gamma_\mu k_\mu + \kappa_i) \tilde{\varphi}(k) = 0, \quad (52)$$

wie sie in den Arbeiten verschiedener Autoren, insbesondere Pais und Uhlenbeck, Bopp u. a. diskutiert worden ist^{11, 20, 21, 22}.

Es scheint wieder wenig sinnvoll, durch Betrachtung spezieller Graphen weitergehende Schlüsse zu ziehen, da Nullstellen und Struktur einiger Glieder der Potenzreihenentwicklung von $L_0(\gamma_\mu k_\mu)$ nach dem Kopplungsparameter sicher keine Beziehung zu den beobachtbaren Massenwerten bzw. der Strukturfunktion haben. Daher erscheint der umgekehrte Weg zunächst gangbarer, durch versuchsweises Ansetzen einer Strukturfunktion und Einsetzen der beobachteten Massen zu einer Näherung für die Wechselwirkungsfunktion der Salpeter-Bethe-Gleichung zu kommen.

Mit Gl. (52) ist ein Zusammenhang zwischen nichtlokaler Feldtheorie freier Teilchen und der Salpeter-Bethe-Gleichung hergestellt. Die vollständige Analogie ist erst gegeben, wenn mit Hilfe der Salpeter-Bethe-Gleichung die Wechselwirkung mit lokalisierten Teilchen behandelt wird. Diese Frage wird in Teil II diskutiert.

Der eine Verfasser (W. F.) verdankt Herrn Professor W. Heisenberg den Hinweis auf die Arbeit von Salpeter und Bethe vor ihrer Veröffentlichung. Den Herren Professoren W. Fucks und J. Meixner, Aachen, sind die Verfasser für ihr Interesse an der Arbeit zu Dank verpflichtet. Sie verdanken ferner Herrn Professor E. Schrödinger einen Hinweis auf die Invarianzschwierigkeit bei dem Ansatz (24).

²⁰ F. Bopp, Z. Naturforschg. **1**, 53, 196 [1946].

²¹ H. J. Bhabha, Rev. mod. Physics **21**, 451 [1949].

²² W. Heisenberg, Comm. Pure Appl. Math. **IV**, 15 [1951].